7. Tutorium – Theoretische Mechanik

① Wiederholung lineare Algebra:

- Endomorphismus: · Abbildung $f: V \to V$ eines Vektorraums V in den gleichen Vektorraum
  · hier: quadratische Matrix

- Selbstadjungiert: · Ein Endomorphismus f ist selbstadjungiert, wenn für alle $u, v \in V$: $\langle f(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle$
  · im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ gilt:
  f selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ die darstellende Matrix ist symmetrisch bzw. hermitesch

- Eigenschaften selbstadjungierter Endomorphismen:

  a.) alle Eigenwerte sind reell
  b.) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal
  c.) Im reellen Fall ist die Matrix immer diagonalisierbar

- Diagonalisierbarkeit: · Eine Matrix A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$
  – es gilt eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren
  – es gilt eine Matrix T, sodass $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat

- Orthogonalität: · Spalten- und Zeilenvektoren sind paarweise orthonormal zueinander
  · Sei A orthogonal: $A^{-1} = A^T$
  · $\det A = \pm 1$

② Diagonalisierung des Trägheitstensors: 3 Massepunkte

Trägheitstensor $\overset{\leftrightarrow}{\Theta} = \begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 24ma^2 & -16ma^2 \\ 0 & -16ma^2 & 24ma^2 \end{pmatrix} = 8ma^2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 = 40ma^2 \qquad \lambda_3 = 8ma^2$

Berechnung der Hauptachsen: $(\Theta - \lambda_i \mathbb{1}) \cdot \vec{r} \overset{!}{=} 0$

Θ_1, Θ_2 $$\left[\begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 24ma^2 & -15ma^2 \\ 0 & -16ma^2 & 24ma^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 40ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 40ma^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16ma^2 y & -16ma^2 z \\ 0 & -16ma^2 y & -16ma^2 z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x \text{ beliebig} \\ -16ma^2 y = 16ma^2 z \\ y = -z \end{matrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 für $y = z = 0$

$$\Theta_3 \quad \left[\begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 24ma^2 & -16ma^2 \\ 0 & -16ma^2 & 16ma^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8ma^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 32\,ma^2 x = 0 \\ 16\,ma^2 y = 16\,ma^2 z \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ \Rightarrow y = z = 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_3.

Durch Normierung der Eigenvektoren erhält man die Basis des Hauptachsensystems.

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich die diagonalisierende Matrix $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ bestimmen. T ist eine orthogonale Matrix, also gilt $T^{-1} = T^T$

Es folgt $$T^{-1} \cdot \hat{\Theta} \cdot T = \begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 40ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8ma^2 \end{pmatrix} = \tilde{\Theta}$$

③ Trägheitsmoment bei Drehung um eine Achse durch den Koordinatenursprung.

Drehachse: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ normiert $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{\omega}$

$$\Rightarrow J_A = \hat{\omega}^T \hat{\Theta} \cdot \hat{\omega} = \frac{1}{2} (0,1,1) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} 8ma^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{8ma^2}$$

$\hat{\omega}$ entspricht aber auch $\hat{e}_3$ im Hauptachsensystem. Das Trägheitsmoment lässt sich im Hauptachsensystem folgendermaßen berechnen.

$$J_A = \hat{e}_3^T \cdot \tilde{\Theta} \cdot \hat{e}_3 = (0,0,1) \begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 40ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8ma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{8ma^2}$$

④ Satz von Steiner:

Sei der Trägheitstensor $\hat{\Theta}$ im Bezug zum Ursprung gegeben und der Schwerpunkt bei $\vec{S}$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_{jk} &= \sum_i m_i \left[\vec{r}_i^{\,2} \delta_{jk} - (\vec{r}_i)_j (\vec{r}_i)_k \right] \\ &= \sum_i m_i \left[(\vec{S} + \vec{r}_i')^2 \delta_{jk} - (\vec{S} + \vec{r}_i')_j (\vec{S} + \vec{r}_i')_k \right] \\ &= \sum_i m_i \left[(\vec{S}^2 + \underline{2 \vec{S} \vec{r}_i'} + \vec{r}_i'^{\,2}) \delta_{jk} - \vec{S}_j \vec{S}_k - \underline{\vec{S}_k (\vec{r}_i')_j} - \underline{\vec{S}_j (\vec{r}_i')_k} - (\vec{r}_i')_j (\vec{r}_i')_k \right] \end{aligned}$$

↳ fällt bei der Summation weg aufgrund der Definition der Schwerpunktskoordinaten

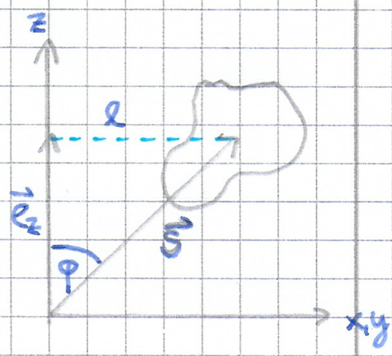
$$\begin{aligned} &= \sum_i m_i \left[\vec{S}^2 \delta_{jk} - \vec{S}_j \vec{S}_k + \vec{r}_i'^{\,2} \delta_{jk} - (\vec{r}_i')_j (\vec{r}_i')_k \right] \\ &= M \underbrace{\left[\vec{S}^2 \delta_{jk} - \vec{S}_j \vec{S}_k \right]} + \underbrace{\sum m_i \left[\vec{r}_i'^{\,2} \delta_{jk} - (\vec{r}_i')_j (\vec{r}_i')_k \right]}_{= \hat{\Theta}'_{jk}} \end{aligned}$$

Bei Drehung um Achse $\hat{n}$ ergibt sich $\vec{S}^2 - (\vec{S} \cdot \hat{n})^2 =: l_\perp^2$

$$\Rightarrow \hat{\Theta}_n = M l_\perp^2 + \hat{\Theta}_n'$$

⑤ Trägheitsmoment bei Drehung durch z-Achse aber im Schwerpunkt

Satz von Steiner: $\Theta = \Theta' + M \cdot \ell^2$



Berechne den Schwerpunkt $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i r_i}{M} \quad \text{mit } M = m_1 + m_2 + m_3 = 6m$$

$$= \frac{1}{M}\left(4m\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\2a\\4a\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\4a\\2a\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3m}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} am = \frac{a}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$\ell = |\vec{S}| \cdot \sin\varphi \qquad |\vec{e}_z \times \vec{S}| = \sin\varphi \cdot |\vec{S}| \cdot |\vec{e}_z|$$

$$= |\vec{e}_z \times \vec{S}| \qquad \sin\varphi = \frac{|\vec{e}_z \times \vec{S}|}{|\vec{S}|}$$

$$= \frac{a}{3}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{a}{3}\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{a}{3}\sqrt{9+4} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$$

Trägheitsmoment zur z-Achse:

$$\hat{\Theta}_{zz} = (0,0,1)\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cdot 8ma^2 = \underline{\underline{24ma^2}}$$

$$\hat{\Theta}'_{zz} = \hat{\Theta}_{zz} - M \cdot \ell^2$$

$$= 24ma^2 - 6m\left(\frac{a}{3}\sqrt{13}\right)^2 = 24ma^2 - 6m\frac{13}{9} = \underline{\underline{\frac{46}{3}ma^2}}$$